

THERMOCINÉTIQUE. — *Sur la résistance thermique due à un contact unique de section circulaire.* Note (*) de MM. MICHAEL YOVANOVICH, HENRI CORDIER et JEAN COUTANCEAU, transmise par M. Léopold Escande.

On montre que des coordonnées elliptiques de révolution sont bien adaptées à l'étude du problème d'un contact unique isotherme, de section circulaire. Au moyen de ces coordonnées on peut déterminer immédiatement la résistance thermique de constriction et l'importance de la zone perturbée au voisinage d'un tel contact.

On se propose de déterminer le champ de température dans un milieu semi-infini ($z > 0$) de conductivité thermique λ avec les hypothèses suivantes :

1° Le problème est de révolution autour de l'axe Oz.

2° Pour $z = 0$ et

a. pour $r < a$: $\theta = \text{Cte}$;

b. pour $r > a$: $\partial\theta/\partial z = 0$.

3° A l'infini, la température est uniforme.

Ces hypothèses correspondent au cas où le milieu semi-infini est en contact parfait avec une source à la température θ , sur un disque circulaire de centre O, de rayon a , situé dans le plan xOy , et isolé en dehors de ce disque (r est la distance d'un point quelconque de ce plan au centre O).

L'utilisation des fonctions harmoniques sphériques peut être adaptée à la résolution de l'équation (1) :

$$(1) \quad \Delta\theta = 0,$$

les conditions aux limites portant sur des surfaces qui sont des cas limites de quadriques de révolution.

Lamb ⁽¹⁾ a montré qu'il était commode d'utiliser les coordonnées η , β , ψ ainsi que les grandeurs ν et μ définies par les relations (2),

$$(2) \quad \begin{cases} x = a \operatorname{ch} \eta \sin \beta \cos \psi = a (\nu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} \cos \psi, \\ y = a \operatorname{ch} \eta \sin \beta \sin \psi = a (\nu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} \sin \psi, \\ z = a \operatorname{sh} \eta \cos \beta = a \nu \mu. \end{cases}$$

Les surfaces $\nu = \text{Cte}$ et $\mu = \text{Cte}$ sont respectivement des ellipsoïdes de révolution et des hyperboloïdes de révolution à une nappe ayant tous de même cercle focal défini par $z = 0$, $r = a$. La valeur de ν peut varier entre zéro et l'infini tandis que μ reste compris entre $+1$ et -1 . Les

formes limites sont l'ellipsoïde $\nu = 0$ qui coïncide avec la portion du plan $z = 0$ pour laquelle on a $r < a$ et l'hyperboloïde $\mu = 0$ qui coïncide avec le reste du plan $z = 0$. Si les intersections des hyperboloïdes avec des plans qui contiennent Oz représentent les lignes de flux, les ellipsoïdes vont alors représenter les surfaces isothermes. Il est évident que les formes limites précédemment indiquées sont en accord avec les conditions aux limites de notre problème.

Dans tout plan $\psi = \text{Cte}$ les lignes $\nu = \text{Cte}$ et $\mu = \text{Cte}$ sont donc, dans le milieu semi-infini $z > 0$, les isothermes et les lignes de flux du champ cherché. Les grandeurs ν , μ , ψ forment un système orthogonal de coordonnées et les valeurs des éléments linéaires parcourus par le point (x, y, z) lorsque ν , μ et ψ varient séparément, sont données par

$$(3) \quad \partial s_\nu = a \left(\frac{\nu^2 + \mu^2}{\nu^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} d\nu, \quad \partial s_\mu = a \left(\frac{\nu^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu, \quad \partial s_\psi = a (\nu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} d\psi.$$

La relation (1) peut s'exprimer en fonction des nouvelles variables :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial s_\nu} \partial s_\mu \partial s_\psi \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial s_\mu} \partial s_\nu \partial s_\psi \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial s_\psi} \partial s_\nu \partial s_\mu \right) = 0,$$

où λ est la conductivité thermique du milieu étudié. Si les propriétés physiques et thermiques du milieu sont homogènes et indépendantes de la température, les relations précédentes conduisent à

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \left((\nu^2 + 1) \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \right] + \frac{\nu^2 + \mu^2}{(\nu^2 + 1)(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} = 0.$$

Puisque le problème est symétrique autour de l'axe z le troisième terme de (4) est nul.

Les conditions aux limites choisies permettent d'écrire

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} = 0.$$

L'équation (4) se réduit donc à

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(\nu^2 + 1) \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right] = 0.$$

La solution de (1) est de la forme

$$(6) \quad \theta = B \text{Arc tg } \nu + C.$$

Nous poserons (et cela n'enlève rien à la généralité) que pour $\nu = 0$, $\theta = 0$, d'où $C = 0$, et pour une valeur arbitraire ν_0 de ν , θ prend la valeur θ_0 , d'où $B = \theta_0 / \text{Arc tg } \nu_0$. La solution s'écrit alors :

$$(7) \quad \theta = \theta_0 \frac{\text{Arc tg } \nu}{\text{Arc tg } \nu_0}.$$

Le flux total de chaleur qui traverse le contact peut être déterminé en considérant la valeur de la densité du flux de chaleur (\vec{q}) relative à une portion élémentaire dS , de la surface d'un ellipsoïde quelconque :

$$(8) \quad Q = \int_{\lambda v} \vec{q} \cdot d\vec{S}_v = \int_0^{2\pi} \int_1^0 -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s_v} \delta s_u \delta s_v.$$

Avec (3) et (7) on trouve

$$Q = \frac{2 \pi \lambda a \theta_0}{\text{Arc tg } \nu_0}.$$

La résistance thermique de milieu entre deux surfaces isothermes est le rapport de la différence de température entre ces deux surfaces au flux total de chaleur. Cette résistance entre le contact circulaire isotherme et une surface ν_0 est donc

$$(10) \quad R(\nu_0) = \frac{\text{Arc tg}(\text{sh } \eta_0)}{2 \pi \lambda a}.$$

On notera que l'hypothèse faite, que les lignes de flux sont des hyperboles et qui conduit à cette relation (10) s'accorde avec les résultats de Weber (2). En effet, pour $\nu_0 = \infty$ la relation (10) devient

$$R(\infty) = \frac{1}{4 \lambda a}.$$

Pour des points situés dans le plan $z = 0$, en dehors du contact le paramètre μ est nul et l'on peut écrire

$$\nu_0 = \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous voyons alors que la résistance thermique entre le disque de contact et une surface isotherme quelconque, est proportionnelle à

$$\text{Arc tg} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le tableau indique les valeurs du paramètre $\text{Arc tg} [(r/a)^2 - 1]^{1/2}$ pour un domaine étendu des valeurs du rapport r/a . Le fait le plus frappant est que plus de 92 % de la résistance totale est due à la zone qui s'étend

$\frac{r}{a}$	$\text{Arc tg} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{R\left(\frac{r}{a}\right)}{R(\infty)}$
∞	90	1,00
30.....	89,57	0,995
60.....	89,03	0,989
40.....	88,55	0,984
20.....	87,50	0,972
10.....	84,27	0,925
1.....	0	0

entre le disque de contact et une surface isotherme située environ à 5 diamètres du disque de contact. Le reste du milieu contribue pour moins de 8 % à la résistance totale. En d'autres termes, la quasi-totalité du saut de température dû à la constriction, affecte une très petite zone au voisinage du disque de contact. La profondeur de cette zone ne dépend que de la taille du contact (a), tandis que la résistance dépend de la conductivité thermique, aussi bien que de la taille du contact. Dans la pratique une valeur moyenne du rayon des disques de contact est 30μ ⁽³⁾ si bien que l'on peut dire que 92 % de la résistance sont concentrés dans une zone d'épaisseur 300μ . Ceci montre que les gradients de température au voisinage immédiat du contact sont très grands.

(*) Séance du 16 décembre 1968.

(1) H. LAMB, *Hydrodynamics*.

(2) H. WEBER, *Crelle*, 74 et 75, 1873.

(3) YU. P. SHLYKOV et YE. A. GANIN, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 7, 1964, p. 927-929.

(Laboratoire d'Études thermiques,
École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique,
rue Guillaume-VII. 86-Poitiers, Vienne.)